Sobre el buen planteamiento de la ecuación de Ostrovsky

JORGE MORALES PAREDES

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Sobre el buen planteamiento de la ecuación de Ostrovsky

JORGE MORALES PAREDES

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director(a):
Ph.D., Felix Humberto Soriano Mendez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Resumen

En este trabajo probaremos que el problema de valor inicial asociado a la ecuación

$$\partial_t u + \frac{1}{2}(u_x)^2 + \partial_x^3 u + \eta(\sigma\partial_x u + \sigma\partial_x^3 u) = 0 \qquad (1)$$

donde $\eta > 0$ and σ denota el inverso aditivo de la transformada de Hilbert, tiene buen planteamiento local en espacios de Sobolev periodicos $H^s(\mathbb{T})$ y buen planteamiento global en espacios de Sobolev a valor real $h^s(\mathbb{T})$ cuando $s \geq 1$.

Palabras clave: Problema de Cauchy, espacios de Sobolev, ecuación de Ostrovsky, ecuación OST, buen planteamiento local, buen planteamiento global.

Abstract

In this work we prove that the initial value problem associated with equation

$$\partial_t u + \frac{1}{2}(u_x)^2 + \partial_x^3 u + \eta(\sigma\partial_x u + \sigma\partial_x^3 u) = 0 \qquad (2)$$

where $\eta > 0$ and σ denotes the additive inverse of the Hilbert transform, is locally well-posed in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{T})$ when $s \geq 1$, and globally well-posed in Sobolev spaces of real-valued functions $h^s(\mathbb{T})$ when $s \geq 1$.

Keywords: Cauchy problem, Solovev spaces, Ostrovky equation, OST equation, Locally wellposedness, Globally wellposedness.

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiaremos el buen planteamiento de la ecuación

$$\partial_t u + \frac{1}{2}(u_x)^2 + \partial_x^3 u + \eta(\sigma\partial_x u + \sigma\partial_x^3 u) = 0 \tag{3}$$

en los espacios de Sobolev periódicos. σ es el inverso aditivo de la transformada periódica de Hilbert, es decir,

$$\sigma\phi = h * \phi,$$

para toda $\phi \in H^s_{per}$ y donde $h(x) = \cot(x/2)/2$. Si $w = u_x$, w es solución de la siguiente perturbación no local de la ecuación KdV

$$\partial_t w + ww_x + \partial_x^3 w + \eta(\sigma\partial_x w + \sigma\partial_x^3 w) = 0. \tag{4}$$

Esta última es conocida como la ecuación de Ostrovsky, Stepanyams y Tsimring o simplemente OST. Esta ecuación ha recibido una especial atención, toda vez que sirve de modelo de la inestabilidad ondas largas radiantes en flujos con cizallamiento (para más detalles vea [BaoKa], [Quia] y [Quia2] y las bibliografías allí mencionadas).

Realmente los problemas (3) y (4) son equivalentes. Consideremos una solución w de (4). Integrando con respecto a x la ecuación (4) tenemos que

$$\partial_t v + \frac{(v_x)^2}{2} + \partial_x^3 v + \eta(\sigma\partial_x v + \sigma\partial_x^3 v) + C(t) = 0. \tag{5}$$

para alguna v antiderivada de w con respecto a x y C una función continua en t. Si hacemos $u = v + \int_0^t C(\tau)d\tau$, u es solución de (3).

Este problema ha sido estudiado ampliamente en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$. Alvarez en [Alv], demuestra el buen planteamiento local para estos espacios cuando $s \geq 1$ y buen planteamiento global para $s \geq 3$. Con las técnicas presentadas aquí, extrapoladas a éstos espacios, se puede obtener el buen planteamiento global para $s \geq 1$. Allí también se demuestra propiedades de decaimiento de las soluciones. Posteriormente, Carvajal y Scialom en [CS], mejoraron los resultados obteniendo buen planteamiento local para $s \geq 0$ y global para $s = 0$. En estos mismos espacios Zhao y Cui en [ZC1] y [ZC2] muestran el buen planteamiento local, cuando $s > -1$ y Zhao usando el método de restricción de Fourier en [Zh] lo prueba para $s > -\frac{5}{4}$.

En los espacios de Sobolev H^s_{per}, Carvajal y Pastrán, en [CP], muestran el buen planteamiento local, para $s \geq -\frac{1}{2}$, de los problemas de Cauchy asociados a la siguiente familia de ecuaciones

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \eta L u + u \partial_x u = 0, \tag{6}$$

donde η es un valor real positivo y L un operador tal que $\widehat{Lu} = -\Phi \widehat{u}$, para una función $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ acotada superiormente. Como $|k| - |k|^3$ es acotada superiormente, la ecuación tratada aquí es un caso particular de ellas.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. El Capítulo 1 presentamos un resumen de las propiedades más importantes de las distribuciones periódicas y los espacios de Sobolev periódicos. El Capitulo 2 es dedicado a examinar las propiedades de las soluciones de la parte lineal de (3) que serán útiles en la prueba del buen planteamiento local de esta en los espacios periódicos. En el Capítulo 3 nos concentramos en la prueba de buen planteamiento local de (3) y en el Capítulo 4 se examina el buen planteamiento global.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos la noción de espacios de Sobolev periódicos. También discutiremos algunas de las propiedades básicas de la series de Fourier en estos espacios que usaremos alo largo de este trabajo.

1.1. Distribuciones periódicas

El conjunto de todas las funciones $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ las cuales son de clase C^∞ y periódicas de periódo 2π es denotado por $\mathcal{P} = C^\infty_{per}$. A este espacio lo dotaremos con la métrica d definida por

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}{1 + \|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty} \tag{1.1}$$

para $\phi, \psi \in \mathcal{P}$, donde $\| \cdot \|_\infty$ es la norma del supremo en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Teorema 1.1. *$(\mathcal{P}, d)$ es un espacio métrico completo. Además, si (ϕ_n) es una sucesión en $\mathcal{P}$ y $\phi \in \mathcal{P}$ entonces $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{P}$ si y sólo si, para toda $j \in \mathbb{N}$, $\|\phi_n^{(j)} - \phi^{(j)}\|_\infty \to 0$, cuando $n \to \infty$.*

Sea $f \in \mathcal{P}$. El k-ésimo coeficiente de Fourier de f es definido por

$$\widehat{f}(k) = (f, e^{ikx}/\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \tag{1.2}$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. Denominaremos como la *transformada de Fourier* de f a la sucesión compleja $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$. *La serie de Fourier* asociada a f es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} \tag{1.3}$$

El siguiente teorema nos da una serie de propiedades de las series de Fourier muy útiles.

Proposición 1.2. *Sea $f \in \mathcal{P}$.*

1. *$\widehat{f}(k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $f \equiv 0$.*

2. *La serie de Fourier de f converge uniforme y absolutamente a f. Más aún, derivando término a término la serie de Fourier de f, la serie resultante converge absoluta y uniformemente a la derivada de f, en otras palabras,*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\widehat{f}(k)e^{ikx},$$

   donde la serie converge uniforme y absolutamente en x. En particular,

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k), \tag{1.4}$$

   para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3. *Teniendo en cuenta el anterior item, se sigue la siguiente identidad de Parseval*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2. \tag{1.5}$$

4. *También tenemos*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}, \tag{1.6}$$

   para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.3. Recordemos que, para f y g funciones periódicas e integrables en $[-\pi, \pi]$, la convolución entre f y g, denotada por $f * g$ es definida por

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy, \tag{1.7}$$

siempre y cuando la integral exista.

Proposición 1.4. *Sean f, g y h funciones integrables.*

1. *$f * g$ existe para casi todo $x \in [-\pi, \pi]$ y es integrable (redefiniendo como 0 donde no exista la integral).*

2. *$f * g = g * f$.*

3. *$f * (g + h) = f * g + f * h$.*

4. *$f * (g * h) = (f * g) * h$.*

5. *$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$*

Definición 1.5. Notaremos por L^p_{per} el espacio de las funciones f tales que $|f|^p$ es integrable en $[-\pi,\pi]$. Es bien conocido que este espacio es de Banach si lo dotamos con la norma

$$\|f\|_{L^p_{per}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Además, cuando $p = 2$, esta norma proviene del siguiente producto interno

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.8}$$

En este caso L^2_{per} es un espacio de Hilbert.

Ya que $\mathcal{P}$ es denso en L^2_{per}, de la Proposición 1.2, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *La transformada de Fourier* $\widehat{\ }: L^2_{per} \to l^2$ *es una isometría. En particular, la identidad de Parseval* (1.5) *es válida para toda* $f \in L^2_{per}$*, lo que es equivalente a que se tenga*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \tag{1.9}$$

Este último teorema motiva la introducción del espacio de las sucesiones rápidamente decrecientes.

Definición 1.7. El espacio de sucesiones rápidamente decreciente denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) = \mathcal{S}$, es el conjunto de todas las sucesiones a valor complejo $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |k|^j |\alpha_k| < \infty, \tag{1.10}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$. Definimos en $\mathcal{S}$ la métrica $\widehat{d}$ dada por

$$\widehat{d}(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\alpha-\beta\|_{\infty,j}}{1+\|\alpha-\beta\|_{\infty,j}}, \tag{1.11}$$

para $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, donde

$$\|\alpha\|_{\infty,j} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}(|\alpha_k||k|^j) \tag{1.12}$$

Teorema 1.8. $(\mathcal{S}, \widehat{d})$ *es un espacio métrico completo.*

Definición 1.9. Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$. La transformada inversa de Fourier de α es la función

$$(\alpha)^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx} \tag{1.13}$$

El siguiente teorema ilustra la relación entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{S}$ via la transformada de Fourier

Teorema 1.10. *La transformada de Fourier es un isomorfismo topológico de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{S}$ (con respecto a las métricas d y $\widehat{d}$).*

Definición 1.11. Para $h \in \mathbb{R}$, el operador de traslación T_h en $\mathcal{P}$ es definido por

$$T_h \phi = \phi(\cdot - h) \tag{1.14}$$

para cada $\phi \in \mathcal{P}$.

En la siguiente proposición veremos algunas propiedades de la traslación, la derivada y la convolución con respecto a la transformada de Fourier.

Proposición 1.12. *Sean $\phi \in \mathcal{P}$, $g \in C_{per}$ y $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en C_{per}. Entonces*

1. $\widehat{T_h \phi}(k) = e^{-ihk} \widehat{\phi}(k)$
2. $\widehat{\phi^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{\phi}(k)$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\frac{T_{-h}\phi - \phi}{h} \to \phi'$ *en* $\mathcal{P}$ *cuando* $h \to 0$.
4. $(\phi * g)^{(j)} = \phi^{(j)} * g$, *cuando* $j = 0, 1, 2, ...$ *En particular,* $\phi * g \in \mathcal{P}$.
5. *Si* $\|g_n - g\|_\infty \to 0$, *cuando* $n \to \infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \phi * g_n = \phi * g$, *donde el límite es tomado en* $\mathcal{P}$.

Definición 1.13. Notaremos por $\mathcal{P}'$ el dual topológico de $\mathcal{P}$, es decir, el espacio de todos los funcionales lineales continuos $\Psi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$. $\mathcal{P}'$ es llamado el espacio de las distribuciones periódicas.

Observación 1.1. $\Psi \in \mathcal{P}'$ si y sólo si existe una sucesión $(\Psi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ talque

$$\Psi(\phi) = \langle \Psi, \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x)\phi(x)dx. \tag{1.15}$$

Cada $f \in L^1_{per}$ define una distribución periódica Ψ_f por medio de la fórmula

$$\langle \Psi_f, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi(x)dx \tag{1.16}$$

para cada $\phi \in \mathcal{P}$. De hecho, si, para f y $g \in L^1_{per}$, $\Psi_f = \Psi_g$, entonces $f = g$ en casi toda parte.

No toda distribución viene representada por una función integrable. En efecto, observe que δ, definida por

$$\delta(\phi) = \phi(0),$$

para toda $\phi \in \mathcal{P}$, es una distribución periódica. Si f representa a δ, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi(x)dx = 0,$$

para todo $\phi \in \mathcal{P}$ tal que $\phi(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\int_A f(x)dx = 0,$$

para todo intervalo $A \subset [-\pi, \pi]$ cerrado que no contiene a 0. Luego, $f = 0$ en casi toda parte. Obviamente, $\delta \neq 0$, lo que muestra que ninguna f integrable puede representar a δ.

Definición 1.14. Decimos que la sucesión (Ψ_n) en $\mathcal{P}'$ converge a $\Psi \in \mathcal{P}'$ si, para todo $\phi \in \mathcal{P}$,

$$\langle \Psi_n, \phi \rangle \to \langle \Psi, \phi \rangle \tag{1.17}$$

cuando $n \to \infty$.

Definición 1.15. A partir de propiedades de adjunción de operadores en $\mathcal{P}$ se extienden estos a $\mathcal{P}'$. Por ejemplo, si f es integrable, el conjugado complejo de f satisface la ecuación

$$\langle \overline{f}, \phi \rangle = \overline{\langle f, \overline{\phi} \rangle},$$

para toda ϕ en $\mathcal{P}$. Así pues definiremos, para $\Psi \in \mathcal{P}'$, el conjugado de Ψ, $\overline{\Psi}$, por

$$\langle \overline{\Psi}, \phi \rangle = \overline{\langle \Psi, \overline{\phi} \rangle}, \tag{1.18}$$

para toda ϕ en $\mathcal{P}$. El operador en $\mathcal{P}$ definido por $\phi \mapsto \widetilde{\phi} = \phi(-\,\cdot)$, lo definimos en $\Psi \in \mathcal{P}'$ por

$$\langle \widetilde{\Psi}, \phi \rangle = \langle \Psi, \widetilde{\phi} \rangle \qquad \phi \in \mathcal{P} \tag{1.19}$$

El operador traslación $T_h : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}'$ por la fórmula

$$\langle T_h \Psi, \phi \rangle = \langle \Psi, T_{-h}\phi \rangle \qquad \phi \in \mathcal{P} \tag{1.20}$$

Para $\Psi \in \mathcal{P}'$, la derivada $\Psi' \in \mathcal{P}'$ es definida por la relación

$$\langle \Psi', \phi \rangle = -\langle \Psi, \phi' \rangle \qquad \phi \in \mathcal{P}. \tag{1.21}$$

A diferencia de $\mathcal{P}$, en donde el producto de dos elementos está asimismo en $\mathcal{P}$, en general, no es posible definir el producto de dos distribuciones periódicas. Sin embargo, podemos definir el producto de una distribución periodica con un elemento de $\mathcal{P}$. Sean $\psi \in \mathcal{P}$ y $\Psi \in \mathcal{P}'$, el producto $\psi\Psi$ es la distribución periódica definida por

$$\langle \psi\Psi, \phi \rangle = \langle \Psi, \psi\phi \rangle \qquad \phi \in \mathcal{P}. \tag{1.22}$$

En este caso sigue valiendo la regla del producto para derivadas, es decir,

$$(\psi\Psi)' = \psi'\Psi + \psi\Psi'. \tag{1.23}$$

En $\mathcal{P}'$ podemos definir la convolución de una distribución periódica y una función de $\mathcal{P}$. Sean $\phi \in \mathcal{P}$ y $\Psi \in \mathcal{P}'$, entonces la convolución de Ψ y ϕ es dada por

$$\langle \Psi * \phi, \psi \rangle = \langle \Psi, \widetilde{\phi} * \psi \rangle \qquad \forall \psi \in \mathcal{P} \tag{1.24}$$

Observe que si $\Psi \in \mathcal{P}$, entonces $\Psi * \phi(x) = \langle \Psi,\ T_{-x}\widetilde{\phi} \rangle$. Teniendo en cuenta que, para cualquier $\Psi \in \mathcal{P}'$, existe una sucesión (Ψ_n) que converge a Ψ en $\mathcal{P}'$, tenemos que $\Psi * \phi(x) = \langle \Psi,\ T_{-x}\widetilde{\phi} \rangle$. De aquí, se sigue que $\Psi * \phi \in \mathcal{P}$.

Finalmente, de esta última definición podemos hablar de la convolución de dos distribuciones periódicas. En efecto, sean Ψ y $\Xi \in \mathcal{P}'$, la convolución de $\Psi * \Xi$ es definida por

$$\langle \Psi * \Xi, \phi \rangle = \langle \Psi, \widetilde{\Xi} * \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{P}, \tag{1.25}$$

gracias a que $\widetilde{\Xi} * \phi \in \mathcal{P}$.

1.2. Series de Fourier en $\mathcal{P}'$

Definición 1.16. La transformada de Fourier de $\Psi \in \mathcal{P}'$ es la función $\widehat{\Psi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definidada por

$$\widehat{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \Psi, e^{-ikx} \rangle \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{1.26}$$

La N-ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a Ψ es

$$S_N(\Psi)(x) = S_N(\Psi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{\Psi}(k) e^{ikx} \tag{1.27}$$

Teorema 1.17. *Sea $\Psi \in \mathcal{P}'$. Entonces, $S_N(\Psi) \in \mathcal{P}$, para cada $N \in \mathbb{N}$, y $S_N(\Psi) \to \Psi$ en $\mathcal{P}'$, es decir,*

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi}(k) e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} S_n(\Psi), \tag{1.28}$$

donde la suma converge en $\mathcal{P}'$.

Además, se tiene la siguiente versión de la identidad de Parseval, para todo $\phi \in \mathcal{P}$ y todo $\Psi \in \mathcal{P}'$, se tiene que

$$\langle \Psi, \phi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi}(k) \widehat{\phi}(-k) \tag{1.29}$$

Examinemos un poco el conjunto imagen de la tranformada de Fourier en $\mathcal{P}'$.

Definición 1.18. La sucesión compleja $(\alpha_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ se dice de *crecimiento lento*, si existen $C > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\alpha_k| \leq C|k|^N \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{1.30}$$

El conjunto de todas las sucesiones de crecimiento lento es denotado por $\mathcal{S}'$.

Teorema 1.19. *$\alpha \in \mathcal{S}'$ si y sólo si, existe una única $\Psi \in \mathcal{P}'$ tal que $\widehat{\Psi} = \alpha$.*

Definición 1.20. Si $q \in \mathcal{S}'$ y $f \in \mathcal{P}'$, $q\widehat{f} = (q(k)\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'$. Definimos $q(D)$ por

$$q(D)f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(k)\widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{1.31}$$

para toda $f \in \mathcal{P}'$. Es claro que $q(D)$ es un operador lineal continuo en $\mathcal{P}'$.

Con esta notación, para cada $s \in \mathbb{R}$, definimos el operador Λ^s sobre $\mathcal{P}'$ por $\Lambda^s(f) = (1 + D^2)^{\frac{s}{2}} f$, para cada $f \in \mathcal{P}'$.

Proposición 1.21. *Sean $\phi \in \mathcal{P}$, $\Psi \in \mathcal{P}'$, $h \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,*

1. $(T_h\Psi)^\wedge(k) = e^{-ikh}\widehat{\Psi}(k)$
2. $(\Psi^{(n)})^\wedge(k) = (ik)^n\widehat{\Psi}(k)$
3. $(\widetilde{\Psi})^\wedge(k) = \widehat{\Psi}(-k)$
4. $(\Psi * \phi)^\wedge(k) = \widehat{\Psi}(k)\widehat{\phi}(k)$
5. $(\Psi\phi)^\wedge(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi}(k-j)\widehat{\phi}(j)$.

1.3. Espacios de Sobolev

En esta sección introducimos los espacios de Sobolev periódicos y algunas de sus propiedades.

Definición 1.22. Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev denotado por $H^s_{per}([-\pi,\pi]) = H^s_{per}$ es el conjunto de todas las distribuciones periodicas f tales que $\Lambda^s(f) \in L^2_{per}$ (vea Definición 1.20). Es fácil ver que un producto interno para este espacio es

$$(f,g)_s = (\Lambda^s(f), \Lambda^s(g)), \tag{1.32}$$

para cada f y $g \in H^s_{per}$. De la identidad de Parseval, se sigue que H^s_{per} es un espacio de Hilbert.

En el siguiente teorema se resumen algunas propiedades de estos espacios.

Teorema 1.23. *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

1. *Supongamos que $s \geq r$. Entonces H^s_{per} está continua y densamente encajado en H^r_{per} y*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \tag{1.33}$$

para todo $f \in H^s_{per}$.

2. *Para todo $s \in \mathbb{R}$, $(H^s_{per})'$, el dual topológico de H^s_{per}, es isométricamente isomorfo a H^{-s}_{per}. La relación dualidad es dada por*

$$\langle f, g\rangle_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k), \tag{1.34}$$

para toda $f \in H^s_{per}$ y $g \in H^{-s}_{per}$.

3. *$\mathcal{P}$ es denso en H^s_{per}.*

Observación 1.2. Si k es un entero positivo, entonces el espacio H^k_{per} coincide con el espacio de todas las funciones $f \in L^2_{per}$ cuyas derivadas (en $\mathcal{P}'$) $f^{(j)}$, $j = 1, 2, ...k$ pertenecen a L^2_{per}. En este caso las normas $\|f\|_k$ y $\sum_{j=0}^{k}\|f^{(j)}\|_{L^2_{per}}$ son equivalentes.

Ahora estamos en condiciones de relacionar las derivadas en el sentido clásico con las derivadas en $\mathcal{P}'$ ("derivadas débiles"). En esta dirección, tenemos el siguiente resultado, conocido como *lema de encaje Sobolev.*

Lema 1.24. *Si $s > \frac{1}{2}$, entonces H^s_{per} está continua y densamente inmerso en C_{per} y*

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq C\|f\|_s \tag{1.35}$$

Veamos el siguiente resultado.

Teorema 1.25. *Si $s > \frac{1}{2}$, entonces H^s_{per} es un álgebra de Banach con respecto al producto de funciones. Esto es, si f y $g \in H^s_{Per}$, entonces $fg \in H^s_{per}$ y vale*

$$\|fg\|_s \leq c_s\|f\|_s\|g\|_s \tag{1.36}$$

Demostración. Sean f y $g \in H^s_{per}$. Como las series de Fourier de f y g convergen absolutamente a ellas, tenemos que

$$(fg)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k-j)\widehat{g}(j)\right)e^{ikx},$$

donde la última serie converge uniforme y absolutamente (teorema de Mertens para series o bien el teorema de Fubini). Luego,

$$\widehat{\Lambda^s(fg)}(k) = (1+k^2)^{\frac{s}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k-j)\widehat{g}(j)\right).$$

Ahora bien, como

$$(1+k^2)^{\frac{s}{2}} \leq C_s\left((1+(k-j)^2)^{\frac{s}{2}} + (1+j^2)^{\frac{s}{2}}\right),$$

$$\left|\widehat{\Lambda^s(fg)}(k)\right| \leq$$

$$\leq C_s \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(|(1+(k-j)^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(k-j)\widehat{g}(j)| + |\widehat{f}(k-j)(1+j^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{g}(j)| \right).$$

De la desigualdad de Young y la identidad de Parseval, se sigue que

$$\|fg\|_s \leq C_s \left(\|f\|_s \|\widehat{g}\|_{l^1} + \|\widehat{f}\|_{l^1} \|g\|_s \right). \tag{1.37}$$

De aquí sigue el teorema. $\square$

Ahora veamos la siguiente desigualdad debida a Kato.

Teorema 1.26. *Sea $s \geq 1$. Para f y $g \in \mathcal{P}$, tenemos que*

$$\|[\Lambda^s, f]g\|_0 \leq C_s \left(\|\widehat{f'}\|_{l^1} \|g\|_{s-1} + \|f'\|_{s-1} \|\widehat{g}\|_{l^1} \right). \tag{1.38}$$

Demostración. Para f y $g \in \mathcal{P}$, se tiene que

$$([\Lambda^s, f]g)\widehat{\ }(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} ((1+k^2)^{\frac{s}{2}} - (1+j^2)^{\frac{s}{2}})\widehat{f}(k-j)\widehat{g}(j).$$

Ahora bien, como

$$|(1+k^2)^{\frac{s}{2}} - (1+j^2)^{\frac{s}{2}}| \leq C_s |k-j| ((1+|k-j|^2)^{\frac{s-1}{2}} + (1+j^2)^{\frac{s-1}{2}}),$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
|([\Lambda^s, f]g)\widehat{\ }(k)| \leq & C_s \Bigg(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (1+(k-j)^2)^{\frac{s-1}{2}} |\widehat{f'}(k-j)||\widehat{g}(j)| + \\
& \qquad + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1+j^2)^{\frac{s-1}{2}} |\widehat{f'}(k-j)||\widehat{g}(j)|. \Bigg) \\
\leq & C_s \Bigg(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |(\Lambda^{s-1} f')\widehat{\ }|(k-j)|\widehat{g}|(j) + \\
& \qquad + \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}|(k-j)|(\Lambda^{s-1} g)\widehat{\ }|(j) \Bigg).
\end{aligned}$$

De esta última desigualdad, de la desigualdad de Young y la identidad de Parseval se sigue el teorema.

$\square$

Corolario 1.27. *Sean $s \geq 1$, f y $g \in \mathcal{P}$ con valores reales. Entonces,*

$$|(g, fg')_s| \leq C \left(\|\widehat{f'}\|_{l^1} \|g\|_s \|g'\|_{s-1} + \|f'\|_{s-1} \|g\|_s \|\widehat{g}\|_{l^1} + \|f'\|_{L^\infty} \|g\|_s^2 \right), \tag{1.39}$$

donde la constante C depende unicamente de s.

Capítulo 2

Parte Lineal

Examinemos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \eta(\sigma\partial_x u + \sigma\partial_x^3 u) = 0 \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $s \in \mathbb{R}$, $\eta \geq 0$ y σ es el inverso aditivo de la transformada periódica de Hilbert, es decir,

$$\begin{aligned} \sigma\phi = h * \phi \\ \forall \phi \in H^s_{per} \end{aligned} \tag{2.2}$$

con $h(x) = \frac{\cot(\frac{x}{2})}{2}$.

Un hecho bien conocido es que, para toda $\phi \in \mathcal{P}$,

$$\widehat{\sigma\phi}(k) = \frac{i \operatorname{sig}(k)}{2}\widehat{\phi}(k), \tag{2.3}$$

donde $\widehat{\phi}$ es la transformada de Fourier de ϕ en $\mathbb{T}$. En efecto, como

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\delta\to+0 \\ \eta\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta\leq|x|\leq\eta} \frac{e^{-i\xi x}}{x} dx &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sig}(\xi) \lim_{\substack{\delta\to+0, \\ \eta\to\infty}} \int_{\delta|\xi|}^{\eta|\xi|} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy \\ &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sig}(\xi) \end{aligned}$$

y, para $z \in \mathbb{C} - 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2}\cot\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{k\neq 0}\left(\frac{1}{z-2\pi k} - \frac{1}{2\pi k}\right),$$

donde la convergencia de la serie que aparace en el lado derecho de la igualdad es absoluta y uniforme sobre todo compacto en $z \in \mathbb{C} - 2\pi\mathbb{Z}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0+} \int_{\delta\le |x|\le\pi} &\frac{1}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right) e^{-ikx} dx \\
&= \lim_{\delta\to 0+} \int_{\delta\le |x|\le\pi} \left(\frac{1}{x} + \sum_{k\neq 0}\left(\frac{1}{x-2\pi k} - \frac{1}{2\pi k}\right)\right) e^{-ikx} dx \\
&= \lim_{\delta\to 0+} \left[\int_{\delta\le |x|\le\pi} \frac{e^{-ikx}}{x} dx + \sum_{k\neq 0}\int_{-(2k+1)\pi}^{-(2k-1)\pi} \frac{e^{-iky}}{y} dy\right] \\
&= -i\pi\,\mathrm{sig}(k).
\end{aligned}
$$

Así pues, si

$$q_\eta(k) = -ik^3 - \frac{\eta}{2}(|k| - |k|^3), \tag{2.4}$$

para todo $k \in \mathbb{R}$, el problema (2.1) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \partial_t u + q_\eta(D)u = 0 \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde el operador $q_\eta(D)$ viene definido por

$$\widehat{q_\eta(D)f}(k) = q_\eta(k)\widehat{f}(k), \tag{2.6}$$

para $f \in \mathcal{P}'$. $q_\eta(D) \in \mathcal{B}(H^s_{per}, H^{s-3}_{per})$ y

$$
\begin{aligned}
\|q_\eta(D)f\|^2_{s-3} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3}\left|q_\eta(k)\widehat{f}(k)\right|^2 \\
&\le (1+\eta)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3}(1+k^2)^3\left|\widehat{f}(k)\right|^2 \\
&= (1+\eta)^2\|f\|^2_s .
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Si $u \in C([0,T], H^s_{per})$ es solución de (2.1), $\partial_t u = -q_\eta(D)u \in H^{s-3}_{per}$ y, haciendo uso de la transformada de Fourier,

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\widehat{u}(k,t) + q_\eta(k)\widehat{u}(k,t) = 0 \\
&\widehat{u}(k,0) = \widehat{\phi}(k),
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{\phi}(k)e^{-q_\eta(k)t}, \tag{2.9}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, en otras palabras,

$$u(x,t) = [e^{-q_\eta(\cdot)t}\widehat{\phi}(\cdot)]^\vee(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-q_\eta(k)t}\widehat{\phi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2.10}$$

Para lo que sigue usaremos la siguiente definición.

Definición 2.1. Definimos $V_\eta(t)$ en el espacio de las distribuciones periódicas por

$$V_\eta(t)\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{q_\eta(k)t}\widehat{\phi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},$$

para cada $\phi \in \mathcal{P}'$.

Usando la notación del cálculo funcional asociado al operador $D = \frac{1}{i}\partial_x$, tenemos que

$$u(t,x) = V_\eta(t)\phi = e^{(-D^3-\eta(\sigma(D)+\sigma(D^3)))t}\phi. \tag{2.11}$$

Veamos que si u se define como en (2.11), entonces u es solución del problema (2.1). Veamos primero que $\{V_\eta(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

Teorema 2.2. *Sea $\eta \geq 0$ fijo. Entonces $t \in [0,\infty) \longmapsto V_\eta(t) \in \mathcal{B}(H^s_{per})$ es un semigrupo fuertemente continuo de contracciones para todo $s \in \mathbb{R}$. Además, si $\eta = 0$ puede ser extendido a $\mathbb{R}$ definiendo un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro.*

Demostración. Veamos que V_η es un semigrupo de contracción si $\eta \geq 0$, para esto debemos verificar

1. $V_\eta(t) \in \mathcal{B}(H^s_{per})$.
2. $V_\eta(0) = 1$
3. $V_\eta(t+t') = V_\eta(t)V_\eta(t')$
4. $\lim_{t'\to t} \|V_\eta(t')\phi - V_\eta(t)\phi\|_s = 0$
5. $\|V_\eta(t)\|_{\mathcal{B}(H^s_{per})} \leq 1$ para todo $t \in [0,\infty)$

Como, para todo $\phi \in H^s_{per}$,

$$\begin{aligned}
\|V_\eta(t)\phi\|_s^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-q_\eta(k)t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{2ik^3t}\right| \left|e^{\eta(|k|-|k|^3)t}\right| \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \leq \|\phi\|_s^2,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

se obtienen las condiciones 1 y 5. La condición 2 se tiene gracias a la igualdad

$$V_\eta(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-q_\eta(k)0}\widehat{\phi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \phi. \tag{2.13}$$

para todo $\phi \in \mathcal{P}'$.

Verifiquemos la condición 3. Para todo par t y t' de números reales no negativos, tenemos

$$\begin{aligned}
V_\eta(t+t')\phi &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-q_\eta(k)(t+t')}\widehat{\phi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-q_\eta(k)t}e^{-q_\eta(k)t'}\widehat{\phi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= V_\eta(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-q_\eta(k)t'}\widehat{\phi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= V_\eta(t)V_\eta(t')\phi.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ahora veamos la continuidad fuerte del semigrupo (condición 4). Para $t \geq 0$ y $h \geq 0$

$$\begin{aligned}
\|V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi\|_s^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-q_\eta(k)(t+h)} - e^{-q_\eta(k)t}\right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-2q_\eta(k)t}\right| \left|e^{-q_\eta(k)h} - 1\right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ahora bien como

$$(1+k^2)^s \left|e^{-2q_\eta(k)t}\right| \left|e^{-q_\eta(k)h} - 1\right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \leq 4(1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2, \tag{2.16}$$

para todo k, y $\phi \in H^s_{per}$, el criterio M de Weierstrass garantiza que, para t fijo, la serie en (2.15) converge absoluta y uniformemente en $[0,\infty)$ a una función continua en h. Luego, para $t \geq 0$,

$$\lim_{h\to 0+} \|V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi\|_s^2 = 0.$$

Si $t > 0$ y $-t < h < 0$, de las condiciones 1, 2 y 5 se sigue que

$$\|V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi\| = \|V_\eta(t+h)(V_\eta(-h)\phi - \phi)\| \leq \|V_\eta(-h)\phi - \phi\|.$$

Así, si $t > 0$,

$$\lim_{h\to 0-} \|V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi\| = 0.$$

Finalmente, si $\eta = 0$, en (2.12) se tiene que

$$\|V_0(t)\phi\|_s^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-ik^3t}\right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 = \|\phi\|_s^2. \tag{2.17}$$

Por lo tanto, $V_0(t)$ puede definirse para todo t y es un operador isométrico. En este caso, en la ecuación (2.14) se demuestra que

$$V_0(t+t') = V_0(t)V_0(t'),$$

para todos t y t' números reales. En particular, $V_0(-t)$ es inverso de $V_0(t)$ y $t \to V_0(t)$ es fuertemente continua en todo $\mathbb{R}$. Así pues, $\{V_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es una grupo fuertemente continuo de operadores unitarios. $\square$

En particular, del teorema inmediatamente anterior tenemos que, para $\phi \in H^s$, $u(t) = V_\eta(t)\phi$ es una función continua en t, para $t \in \mathbb{R}$, con valores en H^s. Más aún, tenemos que, para ϕ_1 y ϕ_2 en H^s,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|\phi_1 - \phi_2\|,$$

donde $u_i(t) = V_\eta(t)\phi_i$, $i = 1, 2$. Ahora sí, veamos que $u(t) = V_\eta(t)\phi$ es solución del problema (2.1).

Teorema 2.3. *Para todo $\eta \geq 0$ y t fijo,*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi}{h} + q_\eta(D)V_\eta(t)\phi \right\|_{s-3} = 0 \tag{2.18}$$

Demostración. Para $h > 0$

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi}{h} + q_\eta(D)V_\eta(t)\phi \right\|_{s-3}^2 = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3} \left| \frac{e^{-q_\eta(k)(t+h)} - e^{-q_\eta(k)t}}{h} + q_\eta(k)e^{-q_\eta(k)t} \right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3} \left|e^{-q_\eta(k)t}\right|^2 |G(k,h) + q_\eta(k)|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde

$$G(k,h) = \begin{cases} \frac{e^{-q_\eta(k)h}-1}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ -q_\eta(k) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como, del teorema del valor medio,

$$|G(k,h)| \leq |q_\eta(k)| \leq (1+\eta)\,|k|^3 \tag{2.20}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\left|e^{-q_\eta(k)t}\right|^2 \left| \frac{e^{-q_\eta(k)h} - 1}{h} + q_\eta(k) \right|^2 \leq 4(1+\eta)^2(1+k^2)^3. \tag{2.21}$$

Por lo tanto, cada término en la última serie que aparece en (2.19) es menor igual a

$$4(1+\eta)^2(1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2, \tag{2.22}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Luego, el criterio M de Weierstrass nos garantiza que esta serie converge absoluta y uniformemente a una función continua con respecto a h, para $h \geq 0$. Así pues,

$$\lim_{h\to 0+} \left\| \frac{V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi}{h} + q_\eta(D)V_\eta(t)\phi \right\|_{s-3} = 0. \tag{2.23}$$

Ahora bien, si $h < 0$,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi}{h} + q_\eta(D)V_\eta(t)\phi \right\|_{s-3} = \\
&\qquad = \left\| V_\eta(t+h) \left(\frac{V_\eta(-h)\phi - \phi}{-h} + q_\eta(D)V_\eta(-h)\phi \right) \right\|_{s-3} \leq \\
&\qquad \leq \left\| \frac{V_\eta(-h)\phi - \phi}{-h} + q_\eta(D)\phi \right\|_{s-3} + \|q(D)(\phi - V_\eta(-h)\phi)\|_{s-3} \leq \\
&\qquad \leq \left\| \frac{V_\eta(-h)\phi - \phi}{-h} + q_\eta(D)\phi \right\|_{s-3} + (1+\eta)\|\phi - V_\eta(-h)\phi\|_s. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

De (2.23) y el Teorema 2.2, tenemos que

$$\lim_{h \to 0-} \left\| \frac{V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi}{h} + q_\eta(D)V_\eta(t)\phi \right\|_{s-3} = 0.$$

□

Corolario 2.4. *El problema (2.1) está bien planteado en H^s_{per}, para todo $r \in \mathbb{R}$. Esto es, para todo $\phi \in H^s_{per}$, (2.1) tiene solución única $u \in C([0,\infty), H^s_{per})$ que depende continuamente de este dato inicial. Además, $u \in C^1([0,\infty), H^{s-3}_{per})$.*

Demostración. Solo nos falta ver la continuidad de la derivada de la solución de (2.1). Si $t \geq 0$ y $|h| \leq t$ o $t = 0$ y $h \geq 0$, del teorema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t V_\eta(t+h)\phi - \partial_t V_\eta(t')\phi\|^2_{s-3} = \\
&\qquad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3} |q_\eta(k)|^2 \left| e^{-q_\eta(k)(t+h)} - e^{-q_\eta(k)t} \right|^2 \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2, \quad (2.25)
\end{aligned}$$

para $\phi \in H^s_{per}$. Como, cada término de la serie es acotado por

$$4(1+k^2)^s(1+\eta)^2 \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2,$$

el criterio M de Weierstrass garantiza que la serie en (2.25) converge absoluta y uniformemente a una función continua con respecto a h. Luego,

$$\lim_{h \to 0} \|\partial_t V_\eta(t+h)\phi - \partial_t V_\eta(t)\phi\|^2_{s-3} = 0, \quad (2.26)$$

para $t \geq 0$ (en $t = 0$ el límite es tomado por la derecha). Esto demuestra el corolario. □

Ahora discutiremos algunas propiedades del semigrupo $\{V_\eta(t)\}$ de importancia en la teoría local del problema no lineal en H^s_{per}.

Teorema 2.5. *Para todo $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ y $\lambda \geq 0$, $V_\eta(t) \in \mathcal{B}(H^s_{per}, H^{s+\lambda}_{per})$ y, para alguna constante C_λ,*

$$\|V_\eta(t)\phi\|_{s+\lambda} \leq C_\lambda \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}\right) e^{\frac{\eta t}{16}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}\lambda}{\eta t}}\right)} \|\phi\|_s, \tag{2.27}$$

para toda $\phi \in H^s_{per}$.

En particular, $V_\eta(t)(\phi) \in \mathcal{P}$, para toda $\phi \in H^s_{per}$ y todo $t > 0$.

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}
\|V_\eta(t)\phi\|^2_{s+\lambda} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+\lambda} \left|e^{-q_\eta(k)t}\right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{\lambda} e^{\eta(|k|-|k|^3)t} (1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} [(1+k^2)^\lambda e^{\eta(|k|-|k|^3)t}] \|\phi\|^2_s \\
&\leq C_\lambda [1 + \sup_{k\in\mathbb{Z}} [k^{2\lambda} e^{\eta(|k|-|k|^3)t}]] \|\phi\|^2_s.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{Z}} [k^{2\lambda} e^{\eta(|k|-|k|^3)t}] &= \sup_{k\in\mathbb{Z}^+} [k^{2\lambda} e^{\eta(|k|-|k|^3)t}] \\
&\leq \sup_{\xi\in[1,\infty)} [\xi^{2\lambda} e^{\eta(\xi-\xi^3)t}],
\end{aligned} \tag{2.29}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sea $f(\xi) = \xi^{2\lambda} e^{\eta(\xi - \frac{\xi^2}{\sqrt{2}} t)}$. Entonces, tenemos que

$$f(\xi) \geq \xi^{2\lambda} e^{\eta(\xi-\xi^3)t},$$

para $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego,

$$\sup_{\xi\in[1,\infty)} [\xi^{2\lambda} e^{\eta(\xi-\xi^3)t}] \leq \sup_{\xi\in[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)} f(\xi) \tag{2.30}$$

Ahora veamos cual es el valor máximo de la función f en $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, el cual existe ya que f es continua y

$$\lim_{\xi\to\infty} f(\xi) = 0.$$

Si ξ_1 es el punto donde f alcanza máximo en $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$,

$$\xi_1^2 - \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}\lambda}{\eta t} = 0.$$

En otras palabras,

$$\xi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\eta t}}. \tag{2.31}$$

Por lo tanto, el valor máximo de f es

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}\lambda}{\eta t}}\right)^{2\lambda} e^{\frac{\eta t}{8}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}\lambda}{\eta t}}\right)} e^{-\lambda}. \tag{2.32}$$

De (2.29) y (2.30), obtenemos

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}[k^{2\lambda}e^{\eta(|k|-|k|^3)t}] \leq C_\lambda \left(1+\frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)^2 e^{\frac{\eta t}{8}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}\lambda}{\eta t}}\right)} \tag{2.33}$$

Gracias a esta última desigualdad, de (2.28), tenemos que

$$\|V_\eta(t)\phi\|_{s+\lambda}^2 \leq C_\lambda \left(1+\frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)^2 e^{\frac{\eta t}{8}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}\lambda}{\eta t}}\right)} \|\phi\|_s^2,$$

para toda $\phi \in H^s_{per}$. Esto demuestra el teorema. $\square$

Teorema 2.6. *Sean $t>0$, $s>-\frac{1}{2}$ y $\eta \geq 0$. Entonces $V_\eta(t) \in \mathcal{B}(L^1_{per}, H^s_{per})$. Además,*

$$\|V_\eta(t)\phi\|_s \leq C_s \left(1+\frac{1}{(\eta t)^{\frac{s}{3}}}+\frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{6}}}\right) \|\phi\|_{L^1_{per}} \tag{2.34}$$

Demostración. Como $\left|\widehat{\phi}(k)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\phi\|_{L^1_{per}}$,

$$\begin{aligned} \|V_\eta(t)\phi\|_s^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s e^{\eta(|k|-|k|^3)t} \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\ &\leq \frac{\|\phi\|_{L^1_{per}}^2}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s e^{\eta(|k|-|k|^3)t} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s e^{\eta(|k|-|k|^3)t} &\leq 1+2^{s+1}+2\sum_{k=2}^{\infty}(2k^2)^s e^{\eta(k-k^3)t} \\ &\leq 1+2^{s+1}+2^{s+1}\sum_{k=2}^{\infty} k^{2s} e^{-\frac{\eta}{2}tk^3} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Supongamos $-\frac{1}{2}<s\leq 0$, como

$$\frac{d}{dr}\left(r^{2s}e^{-\frac{\eta}{2}tr^3}\right) = r^{2s-1}e^{-\frac{\eta t r^3}{2}}\left[2s-\frac{3\eta t r^3}{2}\right], \tag{2.37}$$

$r \mapsto r^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r^3}$ es una función decreciente, para $r \geq 2$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t k^3} &\leq g(2) + \sum_{k=3}^{\infty} k^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t k^3} \\
&\leq 2^{2s} e^{-4\eta t} + \int_2^{\infty} r^{2s} e^{-\frac{\eta t r^3}{2}} dr \\
&\leq 2^{2s} + \int_2^{\infty} r^{2s} e^{-\frac{\eta t r^3}{2}} dr
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Ahora supongamos que $s > 0$. En este caso, de (2.37), tenemos que

$$r_1 = \left(\frac{4s}{3\eta t} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.39}$$

es el punto donde alcanza máximo la función $r \mapsto r^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r^3}$ en $[0, \infty)$. Si $0 < r_1 \leq 2$, $r \mapsto r^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r^3}$ es decreciente en $[2, \infty)$ y se obtendría (2.38), de nuevo. Si $r_1 > 2$, entonces $r \mapsto r^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r^3}$ es creciente en $[2, r_1]$ y decreciente en $[r_1, \infty)$. Por lo tanto, en este caso

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t k^3} &\leq r_1^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r_1^3} + \int_2^{\infty} r^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r^3} dr \\
&\leq \left(\frac{4s}{3\eta t} \right)^{\frac{2s}{3}} e^{-\frac{2}{3} s} + \int_2^{\infty} r^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r^3} dr.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} r^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t r^3} dr &= \frac{2^{\frac{2s+1}{3}}}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \int_{4\eta t}^{\infty} x^{\frac{2s-2}{3}} e^{-x} dx \\
&\leq \frac{2^{\frac{2s+1}{3}}}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \Gamma\left(\frac{2s+1}{3} \right),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

teniendo en cuenta (2.38) o (2.40), tenemos que, para $-\frac{1}{2} < s \leq 0$ o para $s > 0$ con $0 < r_1 \leq 2$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t k^3} \leq 2^{2s} + \frac{2^{\frac{2s+1}{3}}}{3} \Gamma\left(\frac{2s+1}{3} \right) \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \tag{2.42}$$

y para $s > 0$ con $r_1 > 2$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{2s} e^{-\frac{\eta}{2} t k^3} \leq \left(\frac{4s}{3e} \right)^{\frac{2s}{3}} \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s}{3}}} + \frac{2^{\frac{2s+1}{3}}}{3} \Gamma\left(\frac{2s+1}{3} \right) \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \tag{2.43}$$

Combinando (2.42) y (2.43) con (2.36), obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s e^{\eta(|k| - |k|^3)t} \leq C_s \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{s}{3}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{6}}} \right)^2, \tag{2.44}$$

donde

$$C_s = \max\left[1 + 2^{2s+1} + 2^{3s+1}, 2^{s+1}\left(\frac{4s}{3e}\right)^{\frac{2s}{3}}, \frac{2^{\frac{5s+4}{3}}}{3}\Gamma\left(\frac{2s+1}{3}\right)\right]. \tag{2.45}$$

De (2.35), tenemos

$$\|V_\eta(t)\phi\|_s^2 \leq \frac{C_s}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{s}{3}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{6}}}\right)^2 \|\phi\|^2_{L^1_{per}}. \tag{2.46}$$

Esto termina la demostración. □

Capítulo 3

Teoría local en H^s_{per}

En este capítulo examinaremos el buen planteamiento local en H^s_{per} del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}) = 0 \\ u(0) = \phi, \end{cases} \tag{3.1}$$

para $s \geq 1$.

Pongamos en claro el sentido de la expresión

$$\frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}).$$

En realidad el término que representa mayores dificultades es el no lineal. Veamos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea $u \in C([0,T], H^s_{per})$. Entonces,*

1. $u_x \in C([0,T], H^{s-1}_{per})$.
2. $u_{xxx} \in C([0,T], H^{s-3}_{per})$.
3. $\sigma u \in C([0,T], H^s_{per})$.
4. $(u_x)^2 \in C([0,T], H^{s-1}_{per})$, *para* $s > \frac{3}{2}$.
5. $(u_x)^2 \in C([0,T], L^1_{per})$, *para* $s \geq 1$.
6. $(u_x)^2 \in C([0,T], H^{s-3}_{per})$, *para* $1 \leq s$.

Demostración. 1, 2 y 3 siguen inmediatamente, ya que $f \mapsto f_x$, $f \mapsto f_{xxx}$ y $f \mapsto \sigma f$ son transformaciones lineales continuas de H^s_{per} en H^{s-1}_{per}, H^{s-3}_{per} y H^s_{per}, respectivamente. 4 sigue inmediatamente del hecho de que H^r es una álgebra de Banach $r > \frac{1}{2}$. Veamos 5. Es claro que,

$$\begin{aligned} \left\|(u_x)^2\right\|_{L^1_{per}} &= \int_{-\pi}^{\pi} |u_x|^2 \, dx \\ &\leq \|u\|_1^2 \leq \|u\|_s^2 , \end{aligned} \tag{3.2}$$

y que

$$\left\|(u_x)^2-(v_x)^2\right\|_{L^1_{per}} \leq \|u-v\|_1 \, \|u+v\|_1 \leq \|u-v\|_s \, \|u+v\|_s \, , \tag{3.3}$$

para toda u y $v \in H^s_{per}$. De aquí sigue 5. Finalmente examinemos 6. Esta afirmación se sigue inmediatamente del teorema de encaje de Sobolev y de 4 o 5. De hecho, ya que

$$\left|\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1_{per}} \, ,$$

para toda $f \in L^1_{per}$, tenemos que, para $f \in L^1_{per}$,

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{-\frac{1}{2}-\delta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{-\frac{1}{2}-\delta} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \\ &\leq \frac{\|f\|^2_{L^1_{per}}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}+\delta}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

para todo $\delta > 0$. Así, si $1 \leq s < \frac{5}{2}$, con $\delta = \frac{5}{2} - s$, de (3.4) se sigue que $(u_x)^2 \in C([0,T], H^{s-3}_{per})$. □

Gracias a esta última proposición tenemos que, si, para $s \geq 1$ y algún $T > 0$, $u \in C([0,T], H^s_{per})$ es solución de (3.1), entonces $\partial_t u \in C([0,T], H^{s-3}_{per})$, donde la derivada temporal de u la tomamos en el sentido fuerte, es decir, que

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}) \right\|_{s-3} = 0, \tag{3.5}$$

donde el límite es tomado por derecha cuando $t = 0$ y por izquierda cuando $t = T$.

Apelando al principio de Duhamel y teniendo en cuenta el estudio que hicimos en el capítulo anterior de la ecuación (2.1), para estudiar el buen planteamiento de la ecuación (3.1), estudiaremos la siguiente ecuación integral

$$u(t,x) = V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt', \tag{3.6}$$

donde $\{V_\eta(t)\}$ es el semigrupo introducido en la Definición 2.1 del Capítulo 2. Veamos ahora que esta ecuación integral es equivalente al problema de Cauchy (3.1).

Teorema 3.2. *Supongamos que $s \geq 1$, $\phi \in H^s_{per}$ y $T > 0$. El problema (3.1) es equivalente a la ecuación integral (3.6) en H^s_{per}. Más precisamente, para $u \in C([0,T], H^s_{per})$, $u \in C^1([0,T], H^{s-3}_{per})$ y es una solución de (3.1), si, y sólo si, u satisface (3.6).*

Demostración. Sea $u \in C([0,T], H^s_{per})$. Supongamos primero que $u \in C^1([0,T], H^{s-3}_{per})$ y es una solución de (3.1). Del Teorema 2.3, se sigue que

$$\begin{aligned}\partial_{t'}\left(V_\eta(t-t')u(t')\right) &= V_\eta(t-t')(q_\eta(D)u(t') + u_{t'}(t'))\\ &= V_\eta(t-t')\left(-\frac{(u_x(t'))^2}{2}\right),\end{aligned}$$

para $t > t'$. Luego, del teorema fundamental del cálculo, se sigue que u satisface la ecuación integral (3.6).

Ahora supongamos que u satisface la ecuación integral (3.6). Veamos primero que la integral en (3.6) tiene derivada continua en H^{s-3}_{per}. Para este efecto, del Teorema 2.2 y de la parte 6 la Proposición 3.1, tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' - \int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt'\right] =\\ &\qquad = \frac{V(h)-I}{h}\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' +\\ &\qquad\qquad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt', \end{aligned}\tag{3.7}$$

para $h > 0$. Como $u \in C([0,T], H^s_{per})$ y satisface la ecuación integral (3.6),

$$\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' \in C([0,T], H^s_{per}). \tag{3.8}$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{V(h)-I}{h}\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' = -q_\eta(D)\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt', \tag{3.9}$$

en H^{s-3}_{per}. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' - (u_x)^2(t)\right\|_{s-3} \leq\\ &\qquad\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t') - (u_x)^2(t)\right\|_{s-3} dt'. \end{aligned}\tag{3.10}$$

Del Teorema 2.2 y la Proposición 3.1, la función dentro de la integral de la parte derecha de (3.10) es continua para $t' \in [t, t+h]$. Por consiguiente, del teorema del valor medio para integrales, se sigue que

$$\lim_{h\to 0+}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t') - (u_x)^2(t')dt'\right\|_{s-3} = 0. \tag{3.11}$$

En particular, tenemos que

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' = (u_x)^2(t) \tag{3.12}$$

en H^{s-3}_{per}. Si $h<0$, como antes, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' - \int_0^{t} V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt'\right] = \\ = \frac{V(-h)-I}{-h}\int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' + \\ + \frac{1}{-h}\int_{t+h}^{t} V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt'. \end{aligned}\tag{3.13}$$

Procediendo como en (2.19), se verifica que

$$\left\|\frac{V(-h)-I}{-h}\phi\right\|_{s-3} \le \|\phi\|_s,$$

para toda $\phi\in H^s_{per}$. Así pues, de (3.8),

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0-} \frac{V(-h)-I}{-h}\int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' = \\ = \lim_{h\to 0-} \frac{V(-h)-I}{-h}\int_0^{t} V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt', \end{aligned}\tag{3.14}$$

en H^{s-3}_{per}. También tenemos que

$$\lim_{h\to 0-} \frac{1}{-h}\int_{t+h}^{t} V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' = (u_x)^2(t), \tag{3.15}$$

en H^{s-3}_{per}. Por lo tanto, la integral en (3.6) tiene derivada con respecto a t en H^{s-3}_{per} y

$$\frac{d}{dt}\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' = -q_\eta(D)\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' + (u_x)^2(t).$$

De aquí se sigue que u es derivable y satisface la ecuación (3.1). □

Para $u\in C([0,T],H^s_{per})$, sea

$$A(u)(t) = V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt'. \tag{3.16}$$

Veamos que $A(u)\in C([0,T],H^s_{per})$, para $s\ge 1$. Basta ver que

$$\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt'$$

es continua en t. Gracias a los Teoremas 2.5 y 2.6, a la desigualdad (3.2) (si $1 \leq s \leq \frac{3}{2}$) y a que H^{s-1}_{per} es un álgebra de Banach (si $s > \frac{3}{2}$) tenemos que

$$\|V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')\|_s \leq f_s(t-t')\|u(t')\|_s^2, \tag{3.17}$$

donde

$$f_s(t) = \begin{cases} C_s\left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{1}{2}}}\right) e^{\frac{\eta t}{16}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}}{\eta t}}\right)} & \text{si } s > \frac{3}{2}, \\ C_s\left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{s}{3}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{6}}}\right) & \text{si } 1 \leq s \leq \frac{3}{2}, \end{cases}$$

para $t > 0$. Como f_s es localmente integrable se tiene que

$$\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' \in H^s_{per}.$$

Para $h > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' - \int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' = \\ = (V_\eta(h) - I)\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' + \\ + \int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' \end{aligned}$$

Ya que, de la desigualdad (3.17),

$$\left\|\int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt'\right\|_s \leq \sup_{[0,T]}\|u\|_s^2 \int_0^h f(\tau)\,d\tau,$$

tenemos la continuidad a derecha de

$$\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt'.$$

Si $h < 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' - \int_0^t V_\eta(t+t')(u_x)^2(t')dt' = \\ = \int_{t+\tilde{h}}^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' + \\ + (V_\eta(-\tilde{h}+h) - V_\eta(-\tilde{h}))\int_0^{t+\tilde{h}} V_\eta(t+\tilde{h}-t')(u_x)^2(t')dt' - \\ - \int_{t+\tilde{h}}^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' \end{aligned}$$

para $-t < \tilde{h} < h$. Escogiendo $\tilde{h}$ tal que

$$\int_0^{\tilde{h}} f(\tau)\, d\tau < \epsilon/3,$$

y haciendo uso de la desigualdad (3.17), tenemos que la norma en H^s_{per} del primer y tercer términos del lado derecho de la última ecuación son menores que $\epsilon/3$. Por un momento fijando este $\tilde{h}$, podemos tomar h suficientemente pequeño tal que la norma en H^s_{per} del segundo término la podemos hacer menor que $\epsilon/3$. Por lo tanto, para $h < 0$ suficientemente pequeño,

$$\left\| \int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')(u_x)^2(t')dt' - \int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' \right\|_s < \epsilon.$$

Esto demuestra la continuidad a izquierda de

$$\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt'.$$

Así pues, para $u \in C([0,T], H^s_{per})$, $A(u) \in C([0,T], H^s_{per})$.

Observe que cualquier solución de la ecuación (3.6) es un punto fijo de A. Lo que nos motiva a ver si A satisface las condiciones del teorema del punto fijo de Banach en un subespacio métrico completo de $C([0,T], H^s_{per})$ conveniente.

Sean T, r números reales positivos y $s \geq 1$. Sea

$$X_s(T,r,\phi) = \{u \in C([0,T]; H^s_{per}) | \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - V_\eta(t)\phi\|_s \leq r\}. \tag{3.18}$$

Este conjunto provisto con la métrica definida por

$$d(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_s\,, \tag{3.19}$$

para todo u y $v \in X_s(T,r,\phi)$, es completo. Para conseguir que A sea una contracción en $X_s(T,r,\phi)$ debemos seleccionar de manera conveniente a T. Veamos. Un primer paso nos lo da la siguiente desigualdad, que sigue de (3.17) y la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
\|Au(t) - V_\eta(t)\phi\|_s &= \left\| \frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')dt' \right\|_s \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|V_\eta(t-t')(u_x)^2(t')\right\|_s dt' \\
&\leq \frac{C_s}{2}\int_0^t f_s(t-t')\, \|u_x(t')\|_s^2\, dt' \\
&\leq C(r + \|\phi\|_s)^2 \int_0^T f_s(t')dt'.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Luego, para $u \in X_s(T,r,\phi)$, $A(u) \in X_s(T,r,\phi)$ si

$$C(r + \|\phi\|_s)^2 \int_0^T f_s(t')dt' \leq r. \tag{3.21}$$

Como, de los Teoremas 2.5, 2.6, de la desigualdad (3.3) (si $1 \leq s \leq \frac{3}{2}$) o del hecho de que H^{s-1}_{per} es un álgebra de Banach (si $s > \frac{3}{2}$) tenemos que

$$\begin{aligned} &\|V_\eta(t-t')((u_x)^2(t') - (v_x)^2(t'))\|_s \leq \\ &\qquad \leq f_s(t-t')\|u(t') - v(t')\|_s \|u(t') + v(t')\|_s, \end{aligned} \tag{3.22}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \|Au(t) - Av(t)\|_s &= \left\| \frac{1}{2} \int_0^t V_\eta(t-t')((u_x)^2(t') - (v_x)^2(t'))dt' \right\|_s \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \left\| V_\eta(t-t')((u_x)^2(t') - (v_x)^2(t')) \right\|_s dt' \\ &\leq \frac{C_s}{2} \int_0^t f_s(t-t')\|u(t') - v(t')\|_s \|u(t') + v(t')\|_s \, dt' \\ &\leq C(r + \|\phi\|_s) \int_0^T f_s(t')dt' d(u,v). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ahora seleccionemos T tal que

$$C(r + \|\phi\|_s) \int_0^T f_s(t')dt' \leq \frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

Luego, para el T que satisface las condiciones (3.21) y (3.24), se tiene que A es una contracción en $X_s(T,r,\phi)$. Por lo tanto, existe $u \in X_s(T,r,\phi)$ tal que

$$A(u) = u.$$

En otras palabras, u es solución de (3.6) o, equivalentemente, de (3.1). Así, hemos demostrado parcialmente el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sean $\eta > 0$, $s \geq 1$ y $\phi \in H^s_{per}$. Entonces, existe $T = T(s, \|\phi\|_s, \eta)$ > 0 y una única función $u \in C([0,T], H^s_{per}) \cap C([0,T], H^{s-3}_{per})$ solución de (3.1). La transformación $\psi \mapsto v$ de H^s_{per} en $C([0,T], H^s_{per})$, donde v es solución de (3.1) con ψ en lugar de ϕ, es continua.*

Demostración. Falta probar la unicidad de la solución y la dependencia continua del dato inicial. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.4. *Supongamos que $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta + \gamma > 1$, $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Sea f una función definida en $[0,T]$, no negativa y tal que $t^{\gamma-1}f(t)$ localmente integrable allí. Si*

$$f(t) \leq a + b \int_0^t (t-t')^{\beta-1}(t')^{\gamma-1} f(t')dt' \tag{3.25}$$

para casi todo $(0,T)$*, entonces*

$$f(t) \leq aE_{\beta,\gamma}((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\nu}}t), \tag{3.26}$$

donde $\nu = \beta + \gamma - 1 > 0$ *y*

$$E_{\beta,\gamma}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m y^{m\nu} \tag{3.27}$$

con $c_0 = 1$ *y* c_m *definido por la relación de recurrecia* $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu+\gamma)}{\Gamma(m\nu+\gamma+\beta)}$*, para* m *entero no negativo.*

Además,

$$E_{\beta,\gamma}(y) = O\left(y^{1/2(\frac{\nu}{\beta}-\gamma)}e^{\frac{\beta}{\nu}y^{\frac{\nu}{\beta}}}\right), \tag{3.28}$$

cuando $s \to \infty$*.*

Demostración. Ver el Lema 7.1.2 en [Hr] □

Ahora probaremos la siguiente proposición, que da una forma más precisa de lo que deseamos demostrar en el teorema.

Proposición 3.5. *Sean* ϕ *y* $\psi \in H^s_{per}$*, y* u *y* $v \in C([0,T]; H^s_{per})$ *las correspondientes soluciones de la ecuación en derivadas parciales que aparece en (3.1) con* $u(0) = \phi$ *y* $v(0) = \psi$*. Sea* $M = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_s + \|v(t)\|_s$*. Entonces, para* $t \in [0,T]$*,*

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq F_s(t)\, \|\phi - \psi\|_s \tag{3.29}$$

donde $F_s(t)$ *es una función continua en* t*. Más precisamente,*

1. *si* $1 \leq s \leq \frac{5}{2}$*, se puede tomar* $F_s(t) = E_{\frac{5-2s}{6},1}(ht)$*, en donde* $E_{\frac{5-2s}{6},1}$ *es como en (3.27) y*

$$h = \left(\frac{MC_s((\eta T)^{\frac{2s+1}{6}} + (\eta T)^{\frac{1}{6}} + 1)}{2\eta^{\frac{2s+1}{6}}}\Gamma\left(\frac{5-2s}{6}\right)\right)^{\frac{6}{5-2s}}. \tag{3.30}$$

2. *Si* $s > \frac{3}{2}$*, podemos tomar* $F_s(t) = E_{\frac{1}{2},1}\left(\left(\frac{C_1C_sMG(\eta,T)}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 t\right)\|\phi - \psi\|_s$*,* *donde*

$$G(\eta,T) = \left(\frac{\sqrt{\eta T}+1}{\sqrt{\eta}}\right)e^{\frac{\sqrt{2}\eta T}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{2\eta^2T^2+16\sqrt{2}\lambda\eta T}}. \tag{3.31}$$

Demostración. Sean u y v como en el enunciado de la proposición y sea $w(t) = u(t) - v(t)$. Luego, de la ecuación integral (3.6), se sigue que

$$w(t) = V_\eta(t)(\phi - \psi) - \frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')((u_x)^2(t') - (v_x)^2(t'))dt'. \tag{3.32}$$

Tomando la norma en H^s_{per} y ya que $V_\eta(t)$ es un semigrupo de contracciones, de la desigualdad triangular, tenemos

$$\|w(t)\|_s \leq \|\phi-\psi\|_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left\| V_\eta(t-t')((u_x)^2(t') - (v_x)^2(t'))\right\|_s dt' \tag{3.33}$$

Ahora veamos como está acotada la integral que aparece en esta última desigualdad. Supongamos primero que $1 \leq s \leq \frac{3}{2}$. De (3.3) y del Teorema 2.6, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\| V_\eta(t-t')((u_x)^2(t') - (v_x)^2(t'))\right\|_s dt' \\
&\leq C_s \int_0^t \left(1 + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{s}{3}}} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}}\right) \left\|(u_x)^2(t') - (v_x)^2(t')\right\|_{L^1_{per}} dt' \\
&\leq C_s M \int_0^t \frac{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}} + (\eta(t-t'))^{\frac{1}{6}} + 1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \|w(t')\|_s dt' \\
&\leq \frac{C_s M}{2} \frac{(\eta T)^{\frac{2s+1}{6}} + (\eta T)^{\frac{1}{6}} + 1}{\eta^{\frac{2s+1}{6}}} \int_0^t (t-t')^{-\frac{2s+1}{6}} \|w(t')\|_s dt'
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Así pues, de (3.33), llegamos a que

$$\|w(t)\|_s \leq \|\phi-\psi\|_s + \frac{C_s M((\eta T)^{\frac{2s+1}{6}} + (\eta T)^{\frac{1}{6}} + 1)}{2\eta^{\frac{2s+1}{6}}} \int_0^t (t-t')^{-\frac{2s+1}{6}} \|w(t')\|_s dt'$$

De aquí y gracias al Lema 3.4 sigue la proposición si $1 \leq s \leq \frac{5}{2}$, con $F_s(t)$ como en 1.

Supongamos ahora que $s > \frac{3}{2}$. Del teorema 2.5, si $\lambda = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\| V_\eta(t-t')((u_x)^2(t') - (v_x)^2(t'))\right\|_s dt' \\
&\leq C_1 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1}{2}}}\right) e^{\frac{\eta(t-t')}{16}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}}{\eta(t-t')}}\right)} \left\|((u_x)^2 - (v_x)^2)(t')\right\|_{s-1} dt'.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1}{2}}}\right) e^{\frac{\eta(t-t')}{16}(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}}{\eta(t-t')}})} \leq \\
&\qquad \leq \left(\frac{\sqrt{\eta(t-t')}+1}{\sqrt{\eta(t-t')}}\right) e^{\frac{\eta(t-t')}{16}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}}{\eta(t-t')}}\right)} \\
&\qquad \leq G(\eta,T)(t-t')^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

donde $G(\eta,T)$ es como en (3.31), se sigue que

$$\int_0^t \left\|V_\eta(t-t')((u_x)^2(t')-(v_x)^2(t'))\right\|_s dt' \leq$$
$$\leq C_1 G(\eta,T) C_s M \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{2}} \left\|u(t')-v(t')\right\|_s dt' \quad (3.37)$$

Luego, en este caso, de (3.33), obtenemos

$$\|w(t)\|_s \leq \|\phi-\psi\|_s + C_1 G(\eta,T) C_s M \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{2}} \|w(t')\|_s dt' \quad (3.38)$$

De nuevo, del Lema 3.4 se sigue la proposición para $s > \frac{3}{2}$, con $F_s(t)$ como en 2. □

Esto completa la demostración del Teorema 3.3 □

Un hecho bastante llamativo de las soluciones de la ecuación (3.1) nos lo da el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea $s \geq 1$. Si $u \in C([0,T]; H^s_{per})$ es solución de (3.1), entonces $u \in C((0,T]; \mathcal{P})$.*

Demostración. Mostraremos primero que si $u \in C([0,T]; H^s_{per})$, entonces $u \in C((0,T]; H^{s+\delta}_{per})$, para cualquier $\delta \in (0,1)$. En efecto, como u satisface (3.6), del Teorema 2.5, tenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{s+\delta} =& \left\|V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')(u_x(t'))^2 dt'\right\|_{s+\delta} \\
\leq& \|V_\eta(t)\phi\|_{s+\delta} + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|V_\eta(t-t')(u_x(t'))^2\right\|_{s+\delta} dt' \\
\leq& C_\delta \left(1+\frac{1}{(\eta t)^{\frac{\delta}{2}}}\right) e^{\frac{\eta t}{16}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}\delta}{\eta t}}\right)} \|\phi\|_s + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \left\|V_\eta(t-t')(u_x(t'))^2\right\|_{s+\delta} dt'.
\end{aligned} \quad (3.39)$$

Ahora examinemos la integral que aparece en (3.39). Trataremos dos situaciones por separado: $1 \leq s \leq \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2} < s$

Si $1 \leq s \leq \frac{3}{2}$, del Teorema 2.6 y (3.2), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\|V_\eta(t-t')(u_x(t'))^2\right\|_{s+\delta} dt' \leq& \int_0^t C_{s+\delta} f(t-t') \left\|(u_x(t'))^2\right\|_{L^1_{per}} dt' \\
\leq& C_{s+\delta} \int_0^t f(t-t') \|u(t')\|_s^2 dt' \\
\leq& C_{s+\delta} \sup_{t' \in [0,T]} \|u(t')\|_s^2 \int_0^t f(t-t') dt'
\end{aligned} \quad (3.40)$$

donde

$$f(t) = 1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{s+\delta}{3}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2(s+\delta)+1}{6}}}.$$

Puesto que $\frac{s+\delta}{3}$ y $\frac{2(s+\delta)+1}{6}$ son menores a 1, si $0 < \delta < 1$, f es integrable en cualquier intervalo acotado en $[0, \infty)$.

Ahora veamos que pasa si $s > \frac{3}{2}$. En este caso, del Teorema 2.5, con $\lambda = 1+\delta$, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| V_\eta(t-t')(u_x(t'))^2 \right\|_{(s-1)+(1+\delta)} dt' \quad &\leq \int_0^t C_\delta f(t-t') \left\| (u_x(t'))^2 \right\|_{s-1} dt' \\ \leq C_{s,\delta} \sup_{t' \in [0,T]} \|u(t')\|_s^2 \int_0^t f(t-t') dt' & \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde

$$f(t) = \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\delta+1}{2}}}\right) e^{\frac{\eta t}{16}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{16\sqrt{2}(\delta+1)}{\eta t}}\right)}.$$

En este caso, también f es integrable en cualquier intervalo acotado en $[0, \infty)$, si $0 < \delta < 1$. En particular, (3.39) implica que

$$\|u\|_{s+\delta} \leq C_1(\delta, \eta, t) \|\phi\|_s + C_2(\delta, \eta, t) \sup_{t' \in [0,T]} \|u\|_s^2 \tag{3.42}$$

La continuidad de u, como función de $(0, T]$ en $H_{per}^{s+\delta}$, se sigue como en la discusión precedente al Teorema 3.3.

Repitiendo una y otra vez el anterior razonamiento, se verifica que $u \in C((0, T]; H_{per}^{s+n\delta})$, para cualquier entero positivo n. En particular, tenemos el teorema. $\square$

Este último teorema nos garantiza que si $\phi \in H_{per}^s$, para $s \geq 1$, la ecuación (3.1) tiene una solución en el sentido clásico.

Capítulo 4

Teoría Global

En este capítulo probaremos que el problema (3.1) es globalmente bien planteado en los espacios de Sobolev reales $h^s_{per} = \{f \in H^s_{per} : Imf = 0\}$. Para ésto usaremos los siguientes dos lemas.

Lema 4.1. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_\infty \le C(\|f\| + \|f\|^{\frac{1}{2}} \|f'\|^{\frac{1}{2}}), \tag{4.1}$$

para toda $f \in H^1_{per}$

Demostración. Es claro que para $f \in H^1_{per}$, si $g = f - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}(0)$, entonces $g \in H^1_{per} \hookrightarrow C_{per}$ y

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(y)dy = 0. \tag{4.2}$$

Luego, $g(x_0) = 0$, para algún $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Ahora bien, como

$$(g(x))^2 = 2\int_{x_0}^{x} g(y)g'(y)dy,$$

de la desigualdad de Cauchy Schwarz,

$$|g(x)|^2 \le \left(\int_{x_0}^{x} (g(y))^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_0}^{x} (g'(y))^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\|g\|\|g'\| \tag{4.3}$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 \le& \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}(0)\right|^2 + 2\|g\|\|g'\| \\ \le& C\left(\|f\|^2 + \|f\|\|f'\|\right). \end{aligned}$$

Esto demuestra el lema. □

En el siguiente lema mostramos algunas estimativas *a priori*, útiles en la demostración del buen plantemiento global de (3.1).

Lema 4.2. *Sean $T > 0$, $\phi \in h^{\infty}_{per}$ y $u \in C([0,T]; h^{\infty}_{per})$ la solución de (3.6). Entonces*

$$\|u\| \leq C_1(\|\phi\| + \sqrt{T}(\|\phi'\|^2 + \|\phi'\|^{\frac{5}{3}}))e^{CT}, \tag{4.4}$$

$$\|u_x\| \leq \|\phi'\|, \tag{4.5}$$

$$\|u_{xx}\| \leq \|\phi''\| \, e^{C(\eta + \frac{\|\phi'\|^2}{\eta} + \frac{\|\phi'\|^4}{\eta^3})T}, \tag{4.6}$$

$$\|u_{xxx}\| \leq \|\phi'''\| \, e^{C(\eta + \frac{\|\phi'\|^2}{\eta} + \frac{\|\phi'\|^4}{\eta^3})T} \tag{4.7}$$

y

$$\|u_x\|_j^2 \leq \|\phi'\|_j^2 \, e^{CT \sup_{t' \in [0,T]} \|w_x(t')\|_1}, \tag{4.8}$$

para $j \geq 3$

Demostración. Mostraremos primero (4.5). Si $w = u_x$

$$\begin{aligned} &w_t + ww_x + w_{xxx} + \eta(\sigma w_x + \sigma w_{xxx}) = 0 \\ &w(0) = \phi'. \end{aligned}$$

Multiplicando en ambos lados de la ecuación por w e integrando entre $-\pi$ y π

$$(w, w_t) + (w, ww_x) + (w, w_{xxx}) + \eta(w, \sigma w_x) + \eta(w, \sigma w_{xxx}) = 0 \tag{4.9}$$

Como $(w, ww_x) = 0$ y $(w, w_{xxx}) = 0$, y ya que w es una función a valor real,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|w\|^2 &= -\eta(w, \sigma w_x) - \eta(w, \sigma w_{xxx}) \\ &= \pi\eta \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k| - |k|^3) \, |\widehat{w}(k)|^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ya que $|k| - |k|^3 \leq 0$. Luego, $\|w(t)\|^2 = \|u_x(t)\|^2$ es una función decreciente en $t \in [0, \infty)$ y, en particular, se satisface (4.5).

Mostremos (4.4). Multiplicando por u en ambos lados de la ecuación (3.1) e integrando entre $-\pi$ y π, tenemos

$$(u, u_t) + \frac{1}{2}(u, (u_x)^2) + (u, u_{xxx}) + \eta(u, \sigma u_x) + \eta(u, \sigma u_{xxx}) = 0.$$

Ya que $(u, u_{xxx}) = 0$ y $-\eta(u, \sigma u_x) - \eta(u, \sigma u_{xxx}) \leq 0$, del Lema 4.1, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|u\|^2 &\leq -\frac{1}{2}(u, (u_x)^2) - \eta(u, \sigma u_x) - \eta(u, \sigma u_{xxx}) \\ &\leq \|u\|_\infty \|u_x\|^2 \\ &\leq C\|u\| \|u_x\|^2 + C\|u\|^{\frac{1}{2}} \|u_x\|^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Young y (4.5),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|u\|^2 &\leq C(\|u_x\|^4+\|u_x\|^{\frac{10}{3}})+2C\|u\|^2\\ &\leq C(\|\phi'\|^4+\|\phi'\|^{\frac{10}{3}})+2C\|u\|^2.\end{aligned} \tag{4.11}$$

De esta última desigualdad y gracias a la desigualdad de Gronwall, tenemos

$$\|u\|^2 \leq (\|\phi\|^2+CT(\|\phi'\|^4+\|\phi'\|^{\frac{10}{3}}))e^{2CT}.$$

Ahora veamos (4.6). Sea $v=w_x=u_{xx}$. Derivando con respecto a x en (4.9), obtenemos que

$$v_t+v^2+wv_x+v_{xxx}+\eta(\sigma v_x+\sigma v_{xxx})=0. \tag{4.12}$$

Multiplicando por v en esta última ecuación e integrando entre $-\pi$ y π, se tiene que

$$(v,v_t)+(v,v^2)+(v,wv_x)+(v,v_{xxx})+\eta(v,\sigma v_x)+\eta(v,\sigma v_{xxx})=0$$

Como $(v,v_{xxx})=0$ y $(v,v^2)=-2(v,wv_x)$, de la desigualdad de Cauchy y el Lema 4.1, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|v\|^2 &\leq (v,wv_x)-\eta(v,\sigma v_x)-\eta(v,\sigma v_{xxx})\\ &\leq \|v\|_\infty\|w\|\|v_x\|-\eta(v,\sigma v_x)-\eta(v,\sigma v_{xxx})\\ &\leq C\|w\|\|v_x\|(\|v\|+\|v\|^{\frac{1}{2}}\|v_x\|^{\frac{1}{2}})-\eta(v,\sigma v_x)-\eta(v,\sigma v_{xxx})\\ &\leq C\|w\|(\|v\|\|v_x\|+\|v\|^{\frac{1}{2}}\|v_x\|^{\frac{3}{2}})-\eta(v,\sigma v_x)-\eta(v,\sigma v_{xxx})\end{aligned}$$

Ya que

$$\begin{aligned}-\eta(v,\sigma v_x)-\eta(v,\sigma v_{xxx}) =&\eta\sum_{k=-\infty}^{\infty}(|k|-|k|^3)\,|\widehat{v}(k)|^2\\ &\leq -\eta\sum_{|k|\geq 2}k^2\,|\widehat{v}(k)|^2\\ &\leq \eta\|v\|^2-\eta\|v_x\|^2,\end{aligned} \tag{4.13}$$

de la desigualdad de Young y (4.4),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|v\|^2 &\leq (\eta+C(\epsilon_1+\epsilon_2)\|w\|)\|v\|^2+C(\epsilon_1^{-1}+\epsilon_2^{-\frac{1}{3}})\|w\|\|v_x\|^2-\eta\|v_x\|^2\\ &\leq C\left(\eta+\frac{\|\phi'\|^2}{\eta}+\frac{\|\phi'\|^4}{\eta^3}\right)\|v\|^2.\end{aligned}$$

donde

$$\epsilon_1=\epsilon_2^{\frac{1}{3}}=\frac{4C\|\phi'\|}{\eta} \tag{4.14}$$

La desigualdad de Gronwall implica (4.6).

Mostremos (4.7). Derivando con respecto a x en ambos lados de (4.12) y haciendo $r = v_x$, tenemos

$$r_t + 3vr + wr_x + r_{xxx} + \eta(\sigma r_x + \sigma r_{xxx}) = 0.$$

Multiplicando por r en ambos lados de la ecuación, integrando entre $-\pi$ y π y teniendo en cuenta que $(w, rr_x) = -\frac{1}{2}(r, vr)$ y que (4.13) es válida con r en lugar de v, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|r\|^2 &= 5(r, wr_x) - \eta(r, \sigma r_x) - \eta(r, \sigma r_{xxx}) \\ &\leq 5(r, wr_x) + \eta\|r\|^2 - \eta\|r_x\|^2\end{aligned}$$

De las desigualdades de Cauchy Schwarz y de Young, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|r\|^2 &\leq (\eta + C(\epsilon_1 + \epsilon_2)\|w\|)\|r\|^2 + (\epsilon_1^{-1} + \epsilon_2^{-\frac{1}{3}})\|r_x\|^2\|w\| - \eta\|r_x\|^2 \\ &\leq C\left(\eta + \frac{\|\phi'\|^2}{\eta} + \frac{\|\phi'\|^4}{\eta^3}\right)\|r\|^2,\end{aligned}$$

donde

$$\epsilon_1 = \epsilon_2^{\frac{1}{3}} = \frac{4C\|\phi'\|}{\eta}.$$

De la desigualdad de Gronwall se sigue (4.7).

Finalmente mostremos (4.8). Haciendo el producto interno, en h^j_{per}, con w en ambos lados de (4.9) tenemos

$$(w, w_t)_j + (w, ww_x)_j + (w, w_{xxx})_j + \eta(w, \sigma w_x)_j + \eta(w, \sigma w_{xxx})_j = 0 \quad (4.15)$$

La desigualdad de Kato implica que

$$|(w, ww_x)_j| \leq C\|w_x\|_1\|w\|_j^2,$$

y como $-\eta(w, \sigma w_x)_j - \eta(w, \sigma w_{xxx})_j \leq 0$ y $(w, w_{xxx})_j = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_t}\|w\|_j^2 &= -(w, ww_x)_j - \eta(w, \sigma w_x)_j - \eta(w, \sigma w_{xxx})_j \\ &\leq C\|w_x\|_1\|w\|_j^2 \\ &\leq C\|w\|_j^2 \sup_{t' \in [0,T]}(\|w_x\|_1)\end{aligned}$$

De nuevo, la desigualdad de Gronwall implica (4.8). Esto completa la demostración del lema. □

Ahora podemos establecer el buen planteamineto global del problema (3.1). Haremos uso de las estimativas *a priori* del lema anterior junto con el principio de extensión, el Teorema 3.3 y el Teorema 3.6

Teorema 4.3. *Sea $\phi \in h^s_{per}$, $s \geq 1$. Entonces, para cada $\eta > 0$, existe una única $u \in C([0,\infty); h^s_{per})$ solución del problema (3.1) tal que $\partial_t u \in C([0,\infty); h^{s-3}_{per})$.*

Demostración. Gracias al Teorema 3.6 es suficiente probar el teorema para $s = 1$. El Lema 4.2 implica que

$$\|u\|_1 \leq K(\|\phi\|_1, T), \tag{4.16}$$

para alguna función K continua y creciente en T. Sea

$$T^* = \sup\{T > 0 \,|\, \text{ existe } u \in C([0,T], h^1_{per}) \text{ solución de (3.1)}\}$$

Supongamos que $T^* < \infty$. El Teorema 3.3 nos garantiza que para algún $\tilde{T}$, si $\|\tilde{\phi}\|_1 \leq K(\|\phi\|_1, T^*)$, existe una $\tilde{u} \in C([0,\tilde{T}], h^1_{per})$ solución de (3.1) con $\tilde{u}(0) = \tilde{\phi}$. Luego, si $\tilde{\phi} = u(T^* - \frac{1}{2}\tilde{T})$, tenemos que $\tilde{u}(t) = u(T^* - \frac{1}{2}\tilde{T} + t)$, para $0 \leq t < \frac{1}{2}\tilde{T}$. Por lo tanto, si

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t < T^*, \\ \tilde{u}(t - T^* + \frac{1}{2}\tilde{T}) & \text{si } T^* \leq t \leq T^* + \frac{1}{2}\tilde{T}, \end{cases}$$

$v(t)$ es solución de (3.1) en $[0, T^* + \frac{1}{2}\tilde{T}]$. Esto contradice la forma en que se definió T^*. Luego, $T^* = \infty$. □

Bibliografía

[Alv] Borys Y. Alvarez S., On the Cauchy problem for a nonlocal perturbation of the KdV equation, Tesis Doctoral, IMPA, 2002.

[BaoKa] Bao-Feng Feng, T. Kawahara, *Multi-hump stationary waves for a Korteweg-de Vries equation with nonlocal perturbations*, Physica D, 137, (2000), pp. 237-246.

[CP] X. Carvajal, R. Pastrán, Well-posedness for a family of perturbations of the KDV equation in periodic Sobolev Spaces of negative order, Preimpreso, http://arxiv.org/abs/1105.2995.

[CS] X. Carvajal, M. Scialon, On the well-posedness for the generalized Ostrovsky, Stepanyams and Tsiring equation. Nonlinear Anal, 62 2 (2005). pp. 1277-1287.

[Du] N. Dunford y J. T. Schwartz *Linear Operators, Part I, General Theory* , Interscience Publishers, Inc., 1958.

[Hr] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer Verlag,Berlin, 1981.

[Io] R. J. Iório, Jr.,Valéria de Magalhaes Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in advanced mathematics, 2001.

[Quia] S. Quian, Y.C. Lee, H.H. Chen, *A study of non linear dynamical models of plasma turbulence*, Phys. Fluids B 1 (1) (1989), pp. 87-98.

[Quia2] S. Quian, Y.C. Lee, H.H. Chen, *A turbulence model with stochastic soliton motion*, J. Math. Phys. 31 (1990) pp. 506-516.

[Rd] Walter Rudin, *Real And Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[Ry] H. L. Royden, *Real Analysis*,The Macmillan Company,1968.

[ZC1] X. Zhao, S. Cui *Local well-posedness of the Cauchy problem for Ostrovsky, Stepanyams and Tsiring equation in Sobolev Spaces of negative indices*, Nonlinear Analysis, 70 (2009) pp. 3483-3501.

[ZC2] X. Zhao, S. Cui *Well-posedness of the Cauchy problem for Ostrovsky, Stepanyams and Tsiring equation with low regularity data*, J. Math. Anal. Appl. 344(2008) pp. 778-787.

[Zh] Xiangqing Zhao, *On low regularity of the Ostrovsky, Stepanyams and Tsiring equation* ,J. Math. Anal. Appl. 378(2011) pp. 687-699. 2011.